204 Connexité

I) Notion de connexité :

A) Déf - ~~caractérisat°~~ . (E,d) espace métrique

Prop-déf1 : (i) ∄ de partit° de E en 2 ouverts disjoints non vides
(ii) ——— fermés ———
(iii) Les seules parties ouvertes et fermées de E sont ∅, E
Un tel ensemble E est dit connexe.

Ex2 : {a} connexe , ∅ connexe

Prop3 : A ⊆ E, muni de la distance induite est connexe ⇔ …
⇔ …

Ex4 : ~~R\{0}~~ ℚ non connexe, ℤ non connexe, {0,1} ———

Appli5 : Lemme de passage des douanes

[GOU] [HAS] p. 241 p. 39 [QUÉ Topo] p. 121

B) Stabilité de la connexité :

THM6 : f : (E,d) → (E',d') continue . E connexe ⇝ f(E) connexe

THM7 : (E,d) connexe ⇔ ∀ f : E → {0,1} … cste

Appli8 : A ⊆ E connexe, A ⊆ B ⊆ $\bar{A}$ ⇒ B connexe.
En particulier $\bar{A}$ connexe.

Appli9 : X, Y 2 espaces homéomorphes, X connexe ⇔ Y connexe] ♥ ou idée dans HAS

Prop10 : $(C_i)_i$ connexes de E, tq $\exists i_0, \forall i$ $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$, $\bigcup C_i$ connexe

Rem11 : ~~THM~~ L'union gén. de connexe n'est pas connexe : {0} ∪ {1} non connexe

Prop11 : $(C_i)_i$ famille au + dén de connexe tq $\forall i$ $C_{i-1} \cap C_i \neq \emptyset$, $\bigcup C_i$ connexe

Rem12 : Une ∩ de connexe n'est en gén. pas connexe  …] QUÉ Topo

Prop13 : E = E1 × … × En connexe ⇔ ∀ i, Ei connexe] (si nbre infini faut trouver une distance sur E adéquate … ou topo produit)

[GOU] p. 39 40

C) Ex important : Les connexes de ℝ :

preuve [GOU]

THM14 : A ⊆ ℝ, A connexe ⇔ A intervalle ; ℝ connexe

Rem15 : résultat subtil utilisant l'existence de la borne sup] QUÉ Topo

Ex16 : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ avec distances usuelles, connexes

Appli17 : TVI + Appli17' : Brouwer dim 1 [QUÉ Topo]

Prop18 : I int. ouv. de ℝ, f : I → ℝ continue, f ouverte ⇔ f inj ⇔ f strict monotone

Prop19 : I ⊆ ℝ int. f : I → ℝ, J = f(I). f : I → J homéom° ⇔ f cont et stricte monotone

[HAS] p. 238 239

II) Raffinements de la connexité :

A) Composantes connexes : → la [GOU] résume l'essentiel

Déf20 : relat° d'éq + C(x)

Rem21 : $E = \bigcup_{x \in S} C(x)$, S système de rep. des classe d'éq.

THM22 : $C(x) = \bigcup_{\substack{C \subseteq E \\ C \text{ connexe} \\ x \in C}} C$ = + grand connexe contenant X

Csq23 : · C(x) fermé et connexe
· Si E a un nbre fini de comp connexes, elles sont toutes ouvertes

Prop24 : Tt ens. connexe non vide ouvert et fermé dans X est une comp conn.
· Si $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ où X_i connexe ouvert non vide dans X, les X_i sont les comp. connexes de X

Rem25 : Les comp. connexes ne sont pas en général, ouvertes :
sur $\mathbb{Q} = \bigcup \{x_i\}$ ← ses comp connexes, qui ne sont pas ouvertes dans ℚ

Ex26 : ℝ\{0} =]-∞;0[∪]0;+∞[ce sont ses comp. connexes
(trouver d'autres exs simples)

B) Connexité par arcs :

[tout ce qu'on trouve dans [GOU] se retrouve dans (QUÉ) / [HAS] c'est juste + compact dans [GOU]]

Déf27 : chemin

Déf28 : connexe par arcs + dessin 

THM29 : connexe par arcs ⇒ connexe

Rem30 : réciproque fausse : · $\Gamma = \left[\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (\{x\} \times \mathbb{R}^+)\right] \cup \left[\bigcup_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} (\{x\} \times]-\infty;0[)\right]$ ← je l'aime pas
connexe dans $\mathbb{R}^2$ mais non connexe par arcs

· $\{(0,y) \mid y \in [-1;1]\} \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in]0;1]\}$
connexe non connexe par arcs.

Appli32 : $\mathbb{R}^2$ et ℝ non homéomorphes

Ex33 : · convexe ⇒ connexe par arcs, · étoilé ⇒ connexe par arcs
· Épigraphe d'une fct continue ← dessin.

THM34 : Si E est un ℝ-ev, U ⊆ E ouvert.
U connexe ⇔ U connexe par arcs (⇔ U connexe par lignes polygonales)

[GOU] p. 42 [HAS] p. 248 [GOU] p. 47 [QUÉ] p. 124 [GOU] p. 42

[204] Connexité suite

III) Applications et exemples :

A) Appli en calcul diff : (E,d), (F,d) espaces mét.

Prop35 : E connexe, $f : E \to F$ localemt cste $\Rightarrow$ f cste.

Appli36 : Si $\underset{\text{connexe}}{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, F evn, $f\ \mathcal{C}^1\ \Omega$, ~~de classe~~, $\forall x \in \Omega$

$df_x = 0 \underset{\text{IAF}}{\Rightarrow} f$ localemt cste $\Rightarrow f$ cste.

Rem37 : X connexe essentiel : $E = \mathbb{R}^2$, $\Omega = \{(x,y) \mid y \neq 0\}$,

$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$ loc. cste mais non cste.

Appli38 : Thm d'unicité dans Cauchy-Lip

Appli39 : Thm de Darboux...

Thm39' : TiG fct strict ↗ Dév 1 à bosser [GOU]

[QUÉ.T] p. 143

[GOU] 147

B) Appli en an. cplx.

Prop40 : indice d'une courbe cste sur chaque comp. connexe de $\Omega \setminus \gamma^*$ [QUÉT]

THM41 : Prolongemt analytique

THM42 : Zéros isolés $Z(f)$ discret fermé

Csq43 : si $f|_A = g|_A$, f, g hn sur $\underset{\text{connexe}}{\Omega}$, A possède des pt d'acc ; $f = g$.

Appli44 : polyn. ⊥

[TAU]

THM45 : Runge Dév 2 [QUÉT]

C) Exemples dans les espaces de matrices :

- $GL_n(\mathbb{C})$ + appli
- $GL_n(\mathbb{R})$ comp conn
- $SL_n(\mathbb{R})$ connexe
- $S_n^{++} + O_n(\mathbb{R})$

THM46 : $GL_n(\mathbb{C})$ c.c.

Appli47 : Appli CAL-Alg.

Prop48 : $SL_n(\mathbb{R})$ connexe

THM49 : $GL_n(\mathbb{R})$ comp. connexe.

- [CAL-Alg]
- [QUÉ.Topo]

Réf :

- [GOU]
- [QUÉ Topo]
- [HAS]
- [TAU]
- + [CAL-Alg]